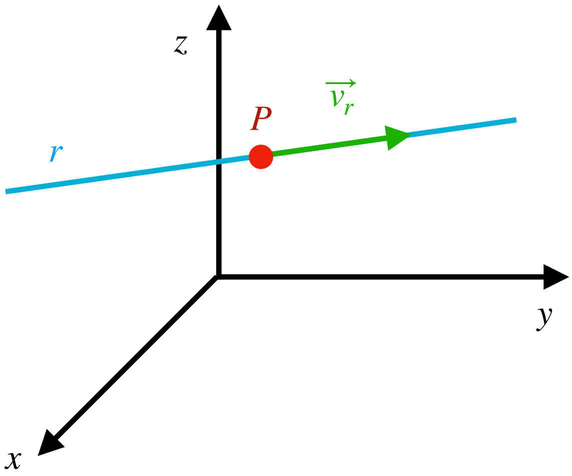
TEMA 5: RECTAS Y PLANOS

1. Ecuaciones de la recta



Para definir una recta necesitamos un punto y un vector que tenga la misma dirección que la recta.

i. Vectorial

$$r : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v_r}$$

$$r : (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$$

ii. Paramétrica

$$r : \begin{cases} x = p_x + \lambda v_x \\ y = p_y + \lambda v_y \\ z = p_z + \lambda v_z \end{cases}$$

iii. Continua

$$r : \frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

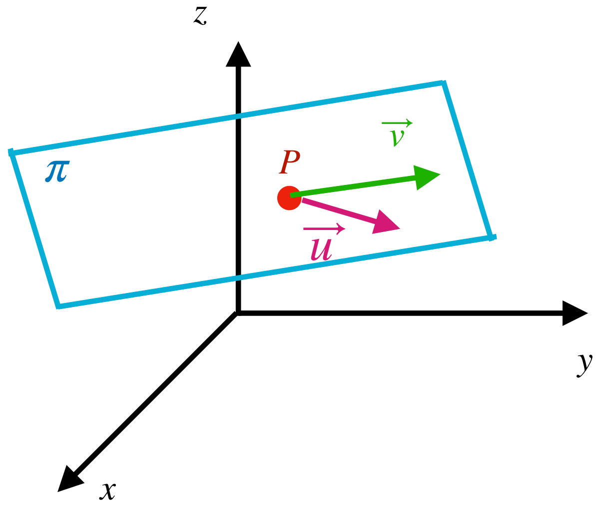
iv. Implicita

$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

El vector director se obtiene de la ecuación implícita mediante el siguiente producto vectorial:

$$\vec{v_r} = \vec{n_1} x \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

2. Ecuaciones del plano



Para definir un plano necesitamos: un punto y dos vectores contenidos en el plano (que no tengan la misma dirección).

i. Vectorial

$$\pi : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}$$

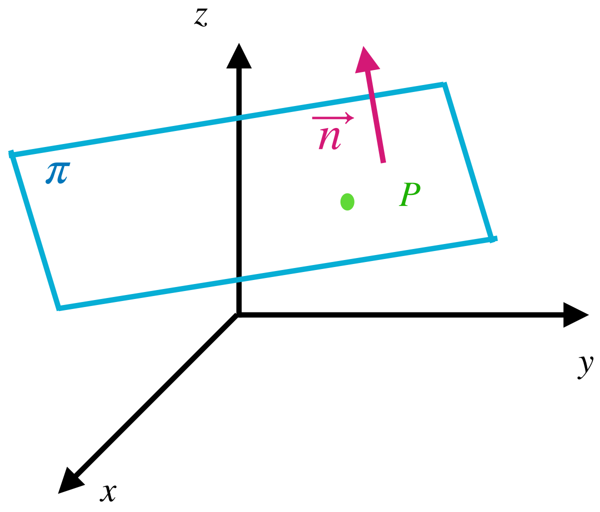
$$\pi : (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(v_x, v_y, v_z) + \mu(u_x, u_y, u_z)$$

ii. Paramétrica

$$\pi : \begin{cases} x = p_x + \lambda v_x + \mu u_x \\ y = p_y + \lambda v_y + \mu v_y \\ z = p_z + \lambda v_z + \mu u_z \end{cases}$$

iii. General

$$\pi : \begin{vmatrix} x - p_x & y - p_y & z - p_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad \pi : Ax + By + Cz + D = 0$$



También podemos definir un plano mediante un punto y un vector perpendicular al plano.

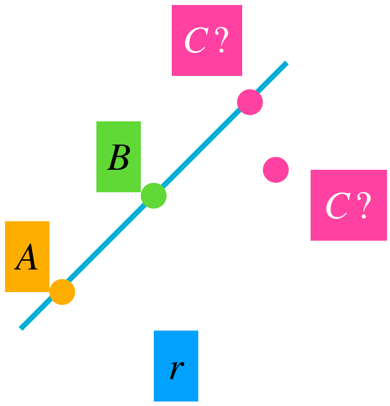
$$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$$

3. Puntos alineados.

Varios puntos están alineados si una misma recta pasa por ellos o, dicho de otra forma, si todos ellos pertenecen a una misma recta.

Ejemplo

¿Están $A(2,1,0)$, $B(-1,0,2)$ y $C(5,2,-2)$ alineados?



Definimos la recta $r$que pasa por A y B:

$\overrightarrow{AB} = (-3,-1,2)$

$A(2,1,0)$

$$r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{2}$$

¿$C \in r$? Sustituimos C en la ecuación de r para comprobarlo.

$$\frac{5-2}{-3} = \frac{2-1}{-1} = \frac{-2-0}{2} \qquad \rightarrow \qquad -1 = -1 = -1$$

$C \in r$ los tres puntos están alineados.

4. Puntos coplanarios.

Varios puntos son coplanarios si existe un mismo plano que los contenga.

Ejemplo

Determina a para que $A(2,1,0)$, $B(-1,0,2)$, $C(0,-2,-1)$ y $D(,0,a,-2)$ sean coplanarios.

$\overrightarrow{AB} = (-3,-1,2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,-3,-1)$

$A(2,1,0)$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7x - 7y + 7z - 7 = 0.$$

$\pi : 7x - 7y + 7z - 7 = 0.$

$\pi : x - y + z - 1 = 0.$

¿$D \in \pi$? Sustituimos D en la ecuación de π para comprobarlo.

$$0 - a - 2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -3$$

Cuando $a = -3 \rightarrow D \in \pi$ y, por tanto, los puntos son coplanarios.

5. Posiciones relativas.

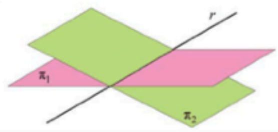
a. Dos planos

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Sistema	Matriz de los coeficientes	Matriz ampliada	
$\left.\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{matrix}\right\}$	$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$	$M^* = \left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$	$n = 3$ $R(M^*) - R(M) \leq 1$

Como $n = 3$, $R(M) \leq 2$ y $R(M^*) \leq 2$, el sistema no puede ser un S.C.D., será un S.C.I. o un S.I.

$R(M) = 1$ y $R(M^*) = 1$ $R(M) = R(M^*) < n \Rightarrow$ S.C.I.	La intersección es todo el plano COINCIDENTES	
$R(M) = 1$ y $R(M^*) = 2$ $R(M) < R(M^*) \Rightarrow$ S.I.	No tienen puntos en común PARALELOS	
$R(M) = 2$ y $R(M^*) = 2$ $R(M) = R(M^*) < n \Rightarrow$ S.C.I.	La intersección es una recta SECANTES	

i. COINCIDENTES

$\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son proporcionales (paralelos).

Coinciden en todos los puntos.

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

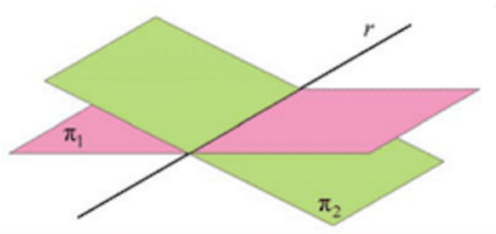
ii. PARALELOS

$\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son proporcionales (paralelos).

No coinciden en ningún punto.

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

iii. SECANTES



$\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ no son proporcionales.

Ningún punto de π_1 se encuentra también en π_2.

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ *(con que una de las tres desigualdades se cumpla es suficiente).*

b. Recta y plano

Posición relativa	Ecuaciones de la recta y el plano	Rango (M)	Rango (M')
Recta contenida en el plano **Sistema compatible indeterminado**	$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D2 = 0 \end{cases}$ $\pi: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ $M' = \left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$	2	2
Recta y plano paralelos **Sistema incompatible**		2	3
Recta y plano secantes **Sistema compatible determinado**		3	3

i. Contenido en el plano

$\vec{n} \perp \vec{v_r} \quad \rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0.$

Cualquier punto de r se encuentra también en π.

ii. Paralelos

$\vec{n} \perp \vec{v_r} \quad \rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0.$

Ningún punto de r se encuentra en π.

iii. SECANTES

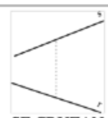
$\vec{v_r}$ y $\vec{n}$ no son perpendiculares.

Coinciden en un solo punto (el punto de corte).

c. Dos rectas

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

$$r \equiv \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4 \end{cases}$$

Sistema $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4 \end{array}\right\}$ Matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A'=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$	$R(A)=R(A')=2$ S.C.I. r y s son COINCIDENTES (La solución es la recta)	 COINCIDENTES
	$R(A)=2$ y $R(A')=3$ S. I. r y s son PARALELAS (No tiene solución)	 PARALELAS
	$R(A)=R(A')=3$ S.C.D. r y s son SECANTES (La solución es el punto de intersección)	 SECANTES
	$R(A)=3$ y $R(A')=4$ S.I. r y s SE CRUZAN (No tiene solución)	 SE CRUZAN

i. COINCIDENTES

$\overrightarrow{v_r} \;//\; \overrightarrow{v_s} \;//\; \overrightarrow{AB}$

Todos los puntos son coincidentes.

ii. PARALELOS

$\overrightarrow{v_r} \;//\; \overrightarrow{v_s}$

$\overrightarrow{AB}$ no es proporcional a los vectores directores.

No tienen ningún punto común.

iii. SECANTES

$\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no son proporcionales. $\overrightarrow{AB}$ es una combinación lineal de ellos.

Coinciden en un punto.

iv. SE CRUZAN

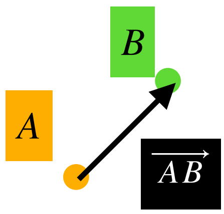
$\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{AB}$ no son proporcionales (son los tres independientes).

No coinciden en ningún punto.

6. Distancias

a. Entre dos puntos.

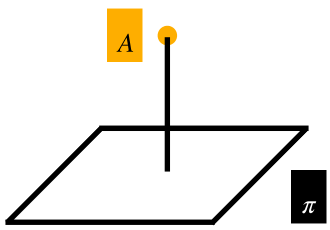
Se puede calcular mediante el módulo del vector que une ambos puntos.



$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}.$$

b. De punto a plano.

Dados un punto $A(a_x, a_y, a_z)$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia entre ambos se calcula mediante la siguiente fórmula:

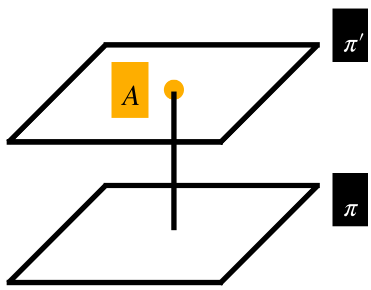


$$d(A, \pi) = \frac{|Aax_{+}Ba_y + Ca_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

c. Entre dos planos.

i. Secantes o coincidentes: no hay distancia.

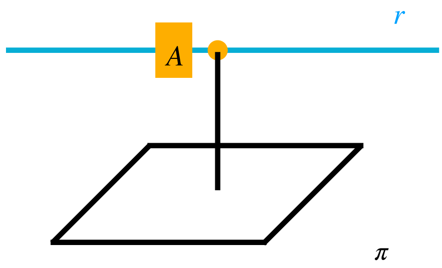
ii. Paralelos: utilizamos la fórmula de punto a plano.



d. Entre recta y plano.

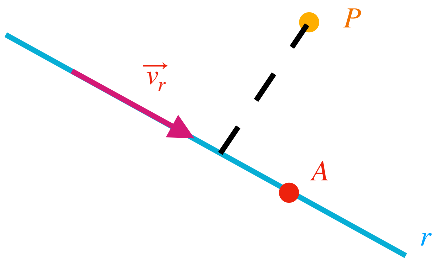
i. Secantes o contenida: no hay distancia.

ii. Paralelos: utilizamos la fórmula de punto a plano.



e. De punto a recta.

$$d(P,r))\frac{|\overrightarrow{v_r} x \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{v_r}|}$$

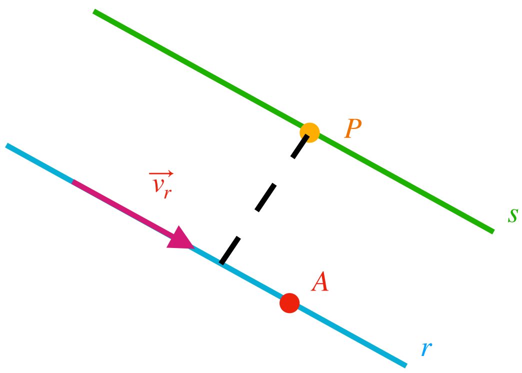


f. Entre dos rectas

i. Coincidentes o secantes: no hay distancia.

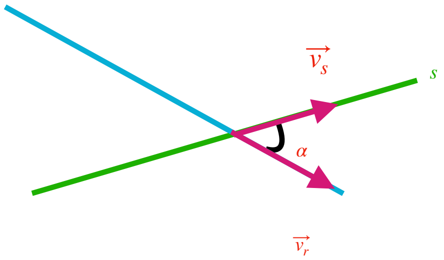
ii. Paralelos: se utiliza la fórmula de punto a plano.

iii. Se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} x \overrightarrow{v_s}|}$



7. Ángulos

a. Entre dos rectas



$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} = x \quad \rightarrow \quad \alpha = arccos(x)$$

2. Entre dos planos

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = x \quad \rightarrow \quad \alpha = arccos(x)$$

3. Entre recta y plano

$$cos(\beta) = cos(90 - \alpha) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|} = x \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 90 - \alpha = arcocos(x)\,. \quad \rightarrow \quad \alpha = 90 - arccos(x)$$

8. Punto simétrico

a. Respecto a un plano.

Ejemplo

$P(-1,-1,1)$ **respecto a** $\pi : x+2y+2z+3=0$.

1. **Calculamos la recta** $r \perp \pi, \quad P \in r$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n} = (1,2,2)$$

$$r : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

2. **Calculamos** M**, punto de corte entre** r **y** π**.**

$$r \to \pi : -1+\lambda+2(-1+2\lambda)+2(1+2\lambda)+3=0$$

$$-1+\lambda-2+4\lambda+2+4\lambda+3=0$$

$$9\lambda+2=0$$

$$\lambda = \frac{-2}{9}$$

$$M : \begin{cases} x = -1-\frac{2}{9} = \frac{-11}{9} \\ y = -1-\frac{4}{9} = -\frac{13}{9} \\ z = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9} \end{cases} \quad \to \quad M\left(\frac{-11}{9}, \frac{-13}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

3. M **es el punto medio entre** P **y** P'**.**

$$P'(a,b,c)$$

$$M\left(\frac{-11}{9}, \frac{-13}{9}, \frac{5}{9}\right) = M\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{-11}{9} = \frac{-1+a}{2} \to a = \frac{-13}{9} \\ -\frac{13}{9} = \frac{-1+b}{2} \to b = \frac{-17}{9} \\ \frac{5}{9} = \frac{1+c}{2} \to c = \frac{1}{9} \end{cases} \quad \to \quad P'\left(\frac{-13}{9}, \frac{-17}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

b. Respecto a una recta.

Ejemplo

$P(-1,-1,0)$ **respecto a** $r: x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$**.**

1. **Calculamos el plano** $\pi \perp r, \quad P \in \pi$**.**

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n}=(1,2,2)$$

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0$$

$$\overrightarrow{n} \quad \rightarrow \quad x-2y+2z+D=0$$

$$P \in r \rightarrow -1+2+D=0$$

$$D=3.$$

$$\pi: x+2y+2z+3=0$$

2. **Calculamos** M**, punto de corte entre** r **y** π**.**

$$r:\begin{cases} x-1=\lambda \\ \frac{y}{2}=-\lambda \\ \frac{z+2}{2}=\lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad r:\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda-2 \end{cases}$$

$$r \rightarrow \pi: \lambda+1+2(2\lambda)+2(2\lambda-2)+3=0$$

$$\lambda+1+4\lambda+4\lambda-4+3=0$$

$$9\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0$$

$$M:\begin{cases} x=0+1 \\ y=-2\cdot 0 \\ z=2\cdot 0-2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad M:(1,0,-2)$$

3. M **es el punto medio entre** P **y** P'**.**

$$P'(a,b,c)$$

$$M(1,0,-2)=M\left(\frac{-1+a}{2},\frac{-1+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 1=\frac{-1+a}{2} \rightarrow a=3 \\ 0=\frac{-1+b}{2} \rightarrow b=1 \\ -2=\frac{c}{2} \rightarrow c=-4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P'(3,1,-4)$$