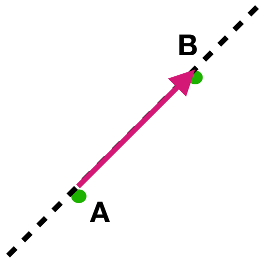
TEMA 4: VECTORES EN EL ESPACIO

1. ¿Qué es un vector?

Un vector en el espacio $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en B.

Se define mediante:



Módulo ($|\overrightarrow{AB}|$ **) :** la longitud del segmento AB.

Dirección: la recta que pasa por A y B.

Sentido: es la forma de recorrer el segmento AB, es decir, de fijar cuál de los extremos es el origen y cuál es el extremo.

Vector unitario: tiene módulo 1.

Vector nulo: aquel en el que coinciden su origen y extremo. Su módulo es 0 y no tiene dirección.

2. Coordenadas de un vector en el espacio.

1. Sistema de referencia canónico es $\{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$ donde:

- El punto fijo es el origen de coordenadas $O(0,\ 0,\ 0)$.
- Los vectores de la base $\mathbb{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ son vectores unitarios y perpendiculares entre sí.
- Las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ en el sistema canónico son las coordenadas del punto extremo menos las del origen:

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x,\ b_y - a_y,\ b_z - a_z)\,.$$

- El módulo de un vector $\vec{v}$ se calcula:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

2. Operaciones con vectores en coordenadas.

I) Suma

El resultado de la suma de dos vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ es otro vector que se obtiene de:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = (v_x,\ v_y,\ v_z) + (u_x,\ u_y,\ u_z) = (v_x + u_x,\ v_y + u_y,\ v_z + u_z).$$

(I) Producto por un escalar.

El resultado del producto de un vector $\overrightarrow{u}$ por un escalar $k \in \mathbb{R}$ es otro vector que se obtiene de:

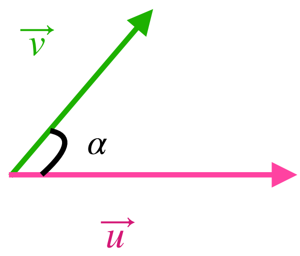
$$k\overrightarrow{u} = (ku_x,\ ku_y,\ ku_z).$$

(II) Producto escalar.

El resultado del producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en coordenadas es un número que se obtiene de:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Producto escalar y sus aplicaciones.



Definición: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\,cos\alpha$

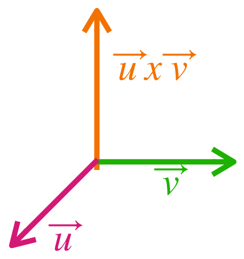
i. Ángulo entre dos vectores.

$$cos\alpha = \left| \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} \right|$$

(III) Producto vectorial.

El resultado del producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en coordenadas canónicas es otro vector que se obtiene de:

$$\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$



Producto vectorial y sus aplicaciones.

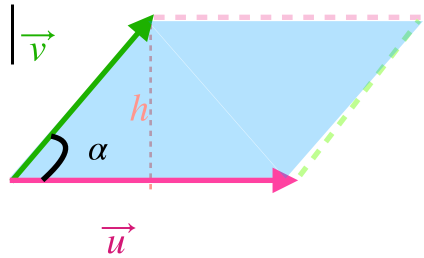
Módulo: $|\vec{u}\,x\,\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\alpha$**.**

Sentido: perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Dirección: El del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$**.**

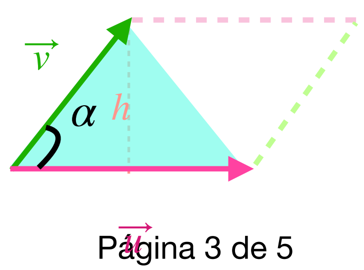
i. Área de un paralelogramo.

$$A_{//} = \left|b \cdot h\right| = \left|\,|\vec{u}||\vec{v}|sen\alpha\right| = \left|\,|\vec{u}\,x\,\vec{v}|\,\right|$$



ii. Área de un triángulo.

$$A_{/\backslash} = \left|\frac{b \cdot h}{2}\right| = \left|\frac{|\vec{u}||\vec{v}|sen\alpha}{2}\right| = \left|\frac{|\vec{u}\,x\,\vec{v}|}{2}\right|$$



(IV) Producto mixto.

El resultado del producto mixto de tres vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es un número que se obtiene de:

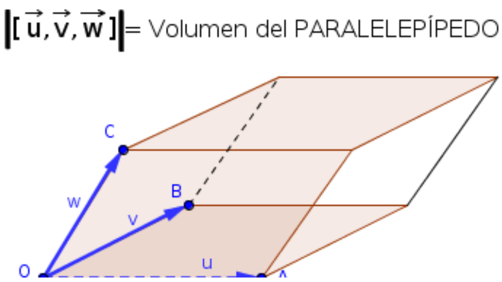
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Producto mixto y sus aplicaciones.

Definición: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} x \overrightarrow{w})$

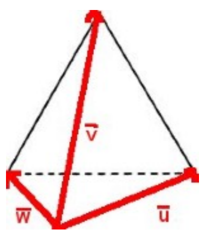
i. Volumen de un paralelepípedo.

$$V = \left| [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \right|$$



ii. Tetraedro.

$$V = \left| \frac{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]}{6} \right|$$



3. Vectores paralelos:

Sean $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$ dos vectores paralelos, se cumple que:

Si $\quad \overrightarrow{u} // \overrightarrow{v} \quad \rightarrow \quad \dfrac{u_x}{v_x} = \dfrac{u_y}{v_y} = \dfrac{u_z}{v_z}$

Si $\quad \overrightarrow{u} // \overrightarrow{v} \quad \rightarrow \quad \left| \overrightarrow{u} x \overrightarrow{v} \right| = 0; \quad \left| \overrightarrow{v} x \overrightarrow{u} \right| = 0.$

4. Vectores perpendiculares:

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores perpendiculares, se cumple que:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0; \qquad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$