TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Es el conjunto formado por m ecuaciones y unas mismas n incógnitas del que se quiere buscar una solución común. Se escribe tal que:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}xn = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}xn = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}xn = b_m \end{array}\right\}$$

Donde a_{ij} son los coeficientes del sistema y b_j los términos independientes. Una solución del sistema son el conjunto de valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

2. Clasificación de sistemas.

Un sistema es:

- **Incompatible,** si no tiene solución.
- **Compatible**, si tiene solución.
  - Si la solución es única es compatible **determinado.**
  - Si tiene más de una solución es compatible **indeterminado**.

3. Expresión matricial.

Dado un sistema de m ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}xn = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}xn = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}xn = b_m \end{array}\right\}.$$

Podemos observar que es equivalente a escribir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matriz de coeficientes **Matriz de términos independientes**

Matriz de incógnitas

O, lo que es lo mismo:

$$A \cdot X = B.$$

Resolver un sistema es, por tanto, equivalente a resolver una ecuación matricial.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Matriz ampliada.

Se define como matriz ampliada la siguiente matriz.

$$A \,|\, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \ldots & & & & | & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

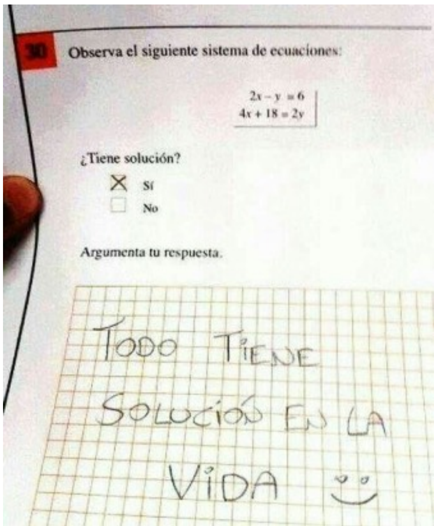
Es de gran utilidad ya que recoge de manera ordenada y en una sola matriz todos los números que definen el sistema.

4. Teorema de Rouché-Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes A sea igual al rango de la matriz ampliada $A|B$. Esto es: el sistema es compatible sí y sólo sí $r(A) = r(A|B)$.

Discusión

- Si $r(A) = r(A|B) =$ nº incógnitas, el sistema es compatible determinado.
- Si $r(a) = r(A|B) <$ nº incógnitas el sistema es compatible indeterminado.
- Si $r(a) \neq r(A|B)$, el sistema es incompatible.



5. Resolución de sistemas.

- **Método de Gauss.**

Véanse los apuntes del curso anterior.

- **Resolver la ecuación matricial.**

Véase el tema anterior.

- **Regla de Cramer.**

Se puede calcular cada una de las incógnitas mediante la siguiente fórmula:

$x_i = \dfrac{|A_{x_i}|}{|A|}$, donde A_{x_i} es la matriz que resulta de cambiar la columna correspondiente a x_i por los términos independientes b_j.

Nótese que solo es válido si $|A| \neq 0$, es decir, si el sistema es compatible.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada.

$$A\,|\,B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & -2 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 3 & -2 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 18 - 0 - 8 + 18 = 32.$$

Al ser distinto de cero, $r(A) = r(A\,|\,B) =$ nº incógnitas, se trata de un sistema compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{32} = \frac{32}{32} = 1.$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{32} = \frac{32}{32} = 1.$$

$$z = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{32} = \frac{-32}{32} = -1.$$

Generalización de la regla de Cramer.

Se puede generalizar la regla para casos indeterminados.

Ejemplo.

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & +z & = & -2 \\ -2x & & -2z & = & 0 \\ -4x & -3y & -3z & = & 2 \end{array}\right\}.$$

Se escribe la matriz ampliada del sistema:

$$A\,|\,B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & -2 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ -4 & -3 & -3 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el rango de A *y* $A\,|\,B$ *para saber qué tipo de sistema es.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 24 - 0 - 18 - 12 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6 \neq 0 \quad \textbf{->} \quad r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 - 0 + 12 + 0 = 0 \quad \textbf{->}. \quad r(A\,|\,B) = 2.$$

$r(A) = r(A\,|\,B) = 2 \neq 3 =$ *nº incógnitas. Sistema compatible indeterminado.*

Se elimina la ecuación que queda fuera del menor distinto de cero y se parametriza la incógnita también que queda fuera. En este caso,

$$A\,|\,B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & -2 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ \cancel{-4} & \cancel{-3} & \cancel{-3} & | & \cancel{2} \end{pmatrix} \quad y \qquad z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El nuevo sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & +\lambda & = & -2 \\ -2x & & -2\lambda & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & -2-\lambda \\ -2x & & = & 2\lambda \end{array}\right\}$$

Y su matriz ampliada:

$A'|B' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & -2-\lambda \\ -2 & 0 & | & 2\lambda \end{pmatrix}$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2\lambda & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0-6\lambda}{6} = -\lambda\,.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -2 & 2\lambda \end{vmatrix}}{6} = \frac{4\lambda-4-2\lambda}{6} = \frac{2\lambda-4}{6} = \frac{\lambda-2}{3}\,.$$

Solución: $x = -\lambda,\ y = \dfrac{\lambda-2}{3},\ z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.