TEMA 2: DETERMINANTES

1. ¿Qué es un determinante?

Un determinante es un número que se calcula a partir de los elementos de una matriz cuadrada.

El determinante de una matriz A se denomina $|A|$ o $det(A)$.

2. Determinante de orden 2.

Es el número que se obtiene realizando el siguiente cálculo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Ejemplos

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 8 - 4 = 4.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 7 \cdot (-2) = 6 + 14 = 20.$$

3. Determinante de orden 3.

Es el número que se obtiene realizando el siguiente cálculo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}.$$

Esto se conoce como la regla de Sarrus.

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 4 + 0 + 0 - 4 - 4 - 0 = -4.$$

4. Propiedades de los determinantes.

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. $|A^t| = |A|$
2. Si en una matriz cuadrada se intercambian dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo.
3. Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por dicho número.
4. Si una matriz cuadrada tiene una fila (o columna) nula, su determinante es cero.
5. Si a una fila (o columna) de una matriz cuadrada le sumamos una combinación lineal de las demás, su determinante no varía.
6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o columnas) iguales o proporcionales, el determinante es nulo.
7. Si una matriz cuadrada tiene una fila (o columna) que es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.
8. Para cualquier fila o columna de un determinante se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+c & a_{13}+d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus respectivos determinantes. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

5. Adjunto de un elemento.

El adjunto del elemento a_{ij} de una matriz de orden n es el número que se obtiene de calcular el determinante de orden n-1 formado por los elementos que resten tras eliminar la fila i y la columna j de la matriz, con el signo que se obtenga de realizar la operación $(-1)^{i+j}$.

6. Determinantes de orden mayor que 3. Desarrollo por adjuntos.

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo orden 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (0 + 0 + 3 - 0 - 12 + 1) + 2 \cdot (-6 + 0 + 3 - 0 - 12 + 2) +$$

$$-1 \cdot (-1 + 4 + 0 - 3 - 2 - 0) = -1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-13) - 1 \cdot (-2) = 8 - 26 + 2 = -16.$$

7. Cálculo del rango de una matriz por determinantes.

El rango de una matriz es igual al orden del menor (determinante formado por k filas y columnas de la matriz) distinto de cero de mayor orden.

Ejemplo

Calcula el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el valor de un menor de orden 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0. \text{ -> } r(A) \geq 2.$$

Al encontrar un menor distinto de cero de orden 2, se sabe que el rango tiene que ser mayor o igual a 2. Se comprueba si hay alguno de orden 3 distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 = 9 \neq 0. \text{ -> } r(A) \geq 3.$$

Al encontrar un menor distinto de cero de orden 3, se sabe que el rango tiene que ser mayor o igual a 3. Se comprueba si hay alguno de orden 4 distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ -> } r(A) < 4.$$

Al no haber más posibilidades de orden 4, el rango tiene que ser menor que 4. Como se sabe también que debe ser mayor o igual que 3,debe ser 3. Es decir, $r(A) = 3$.

8. Cálculo de la matriz inversa con determinantes.

Se puede calcular la matriz inversa mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t .$$

Donde $Adj(A)$ es la matriz de adjuntos.

Nótese que si el determinante de la matriz fuera 0, la matriz no podría ser invertible.

Ejemplo

Calcula la matriz inversa de la siguiente matriz mediante determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 9.$

Obtenemos la matriz de adjuntos:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos en la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -15 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$